周期为 2*q* 理想几乎四进制序列构造研究

彭秀平[1,2]，冀惠璞[1,2]，郑德亮[1,2]，牛晓霞[1,2]
（1. 燕山大学信息科学与工程学院，河北 秦皇岛 066004；
2. 河北省信息传输与信号处理重点实验室，河北 秦皇岛 066004）

摘　要：基于中国剩余定理和四阶分圆类，对周期为 $N=2q$ (q 为奇素数)的几乎四进制序列的构造方法进行了研究。根据序列 y 的 $y(0)$ 和 $y(q)$ 2 个位置含 0 的个数对序列进行分类，构造得到了旁瓣值分别为 $\{0,-2\}$、$\{0,2,-2\}$、$\{0,-2,-2\mathrm{i},2\mathrm{i}\}$，且具有好的平衡性的 3 类理想几乎四进制序列。所提构造方法得到的序列具有良好的自相关性和平衡性，扩大了现有理想平衡四进制序列的存在范围，为实际应用提供了更多性能优良的序列。

关键词：四进制序列；理想几乎四进制序列；平衡序列；分圆类
中图分类号：TN911.2
文献标识码：A
doi: 10.11959/j.issn.1000−436x.2019225

Study on the constructions of optimal almost quaternary sequences with period 2*q*

PENG Xiuping[1,2], JI Huipu[1,2], ZHENG Deliang[1,2], NIU Xiaoxia[1,2]
1. School of Information Science & Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China
2. Hebei Province Key Laboratory of Information Transmission and Signal Processing, Qinhuangdao 066004, China

Abstract: Based on the Chinese remainder theorem and cyclotomic classes of order 4, the constructions of almost quaternary sequences with period N=2q (where q is an odd prime) was studied. According to the number of “0” in the two positions $y(0)$ and $y(q)$, three types of optimal almost quaternary sequences with optimal balance property and out-of-phase autocorrelation values as{0, −2}, {0, 2, −2} and {0, −2, −2i, 2i} were constructed respectively. Through these constructions, all the almost quaternary sequences constructed are balanced and optimal. These constructed sequences extend the existence range of the balanced optimal quaternary sequences and provide more optimal sequences for practical applications.

Key words: quaternary sequence, optimal almost quaternary sequence, balanced sequence, cyclotomic classes

1　引言

四进制序列由于具有恒定的包络特性和系统易于实现等特性，被广泛应用于雷达、声纳、导航、码分多址（CDMA, code division multiple access）等实际通信系统中。在实际应用中，为了实现同步、抗多径干扰和防止载波泄露等需求，通常要求所采用的序列具有尽可能低的自相关函数旁瓣值和好的平衡性。自相关函数旁瓣值全为 0 的序列称为最佳序列，而最佳二进制序列仅存在长度为 4 的(1,1,1,−1)情况，最佳四进制序列仅存在长度为 2、4、8 和 16 的情况，且平衡的最佳四进制序列根本不存在[1]。为此，对理想四进制序列和理想几乎四进制序列的研究受到了国内外学者的广泛关注，对于奇数长的理想四进制序列，Schotten 等[2-3]构造了周期为 $N=\dfrac{p^a+1}{2}\equiv 1(\mathrm{mod}2)$

收稿日期：2019−08−02；修回日期：2019−09−26
基金项目：国家自然科学基金资助项目（No.61601401, No.61601399）；河北省高等学校青年拔尖人才计划基金资助项目（No.BJ2018018）
Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (No.61601401, No.61601399), Young Talent Program of Colleges in Hebei Province under Grant (No.BJ2018018)

（其中 p 为奇素数，a 为正整数）的一类旁瓣值全为 1 的理想四进制序列。随后，Lüke 等[4]利用改进的 Legendre 序列构造了理想奇周期四进制序列。对于偶数长的理想四进制序列，Tang 等[5]证明了周期为偶数长的平衡四进制序列的自相关函数旁瓣值最大模值至少为 2 的特性，并明确了此周期长平衡四进制序列的理想情况为自相关函数旁瓣模值为小于等于 2 的情况。逆 Gray 映射将二进制序列同四进制序列建立了联系，随后这种方法被广泛应用于构造具有理想自相关特性的平衡或几乎平衡的四进制序列，主要包括采用 Sidelnikov[6]序列、理想自相关二进制序列[7]、Legendre 序列[8]等。此外，分圆类方法也被广泛用于四进制序列的构造中，Edemskiy 等[9]运用四阶分圆与中国剩余定理结合的方法分别得到了 2 种旁瓣值为 $\{-4,2,-2,0\}$ 和 $\{-2\pm 2i,\ \pm 2i,-2\}$ 且周期为 $N=2q$（q 为奇素数)的平衡四进制序列，但是其旁瓣值的最大模值分别为 4 和 $\sqrt{8}$，不符合平衡理想四进制序列的标准，在此基础上，Shen 等[10]基于广义分圆类思想，提出了 2 种新的可以得到周期为 $N=2q$（q 为奇素数)，旁瓣值为 $\{2,-2\}$ 的理想四进制序列的构造方法，但是此方法将四进制序列 0 位置和 q 位置的元素值固定为 1 和–1，属于四进制序列元素的特殊情况。

为了进一步扩大理想四进制序列的存在范围，近些年，通过在序列中引入适当个 0 元素的方式，有关理想几乎四进制序列的构造方法被相继提出。代表性成果有 Tang 等[11]通过引入一个 0 元素的方式，基于四阶分圆的方法构造得到一种周期为素数且 $N\equiv 1(\bmod 4)$，旁瓣值为 -1 的理想几乎四进制序列。彭秀平等[12]中通过引入 4 个 0 元素基于交织法对周期为 $N\equiv 0(\bmod 4)$ 且旁瓣值为 $\{0,-4\}$ 的几乎四进制序列的构造方法进行了研究。本文通过在四进制序列中引入一个或 2 个 0 元素的方式，基于中国剩余定理和四阶分圆类对周期为 $N=2q$（q 为奇素数）的理想几乎四进制序列的构造方法进行研究，根据几乎四进制序列 y 的 $y(0)$ 和 $y(q)$ 这 2 个位置中含 0 个数不同提出相应构造方法，当 $(y(0),\ \ y(q))=(0,0)$ 时，得到 2 种旁瓣值为 $\{0,-2\}$ 和 $\{0,2,-2\}$ 的平衡理想几乎四进制序列，当 $y(0)$ 和 $y(q)$ 中有一个位置为 0 时，得到 2 种旁瓣值为 $\{0,2,-2\}$ 和 $\{0,-2,-2i,2i\}$ 的平衡理想几乎四进制序列。

2 基本概念

定义 1[13] 设周期为 N 的序列 $y=(y(0),y(1),\cdots,y(N-1))$，其中 $y(t)\in\{1,-1,i,-i\}$，$i=\sqrt{-1}$，则称序列 y 为四进制序列，其自相关函数定义如式(1)所示。

$$R_y(\delta)=\sum_{t=0}^{N-1}y(t)y^*(t+\delta)=\begin{cases}R_y(0), & \delta=0\\ \gamma, & \delta\neq 0\end{cases} \tag{1}$$

其中，$0\leqslant\delta<N$，$t+\delta=(t+\delta)\bmod N$，$y^*(t)$ 表示 $y(t)$ 的共轭，γ 表示序列 y 的自相关函数旁瓣值，若 $\gamma=0$，则称序列 y 为最佳四进制序列。

引理 1[5] 设 $R_{\max}=\max\limits_{0<\delta<N}|\gamma|$ 表示序列 y 的自相关函数的最大旁瓣模值，那么对于周期为 $N\equiv 0(\bmod 2)>2$ 的平衡四进制序列，一定满足 $R_{\max}\geqslant 2$。因此，若周期为 $N\equiv 0(\bmod 2)>2$ 的平衡四进制序列 y 的自相关函数满足 $R_{\max}=2$，则称序列 y 为平衡理想四进制序列。

本文基于此理论界，通过在四进制序列的基础上引入一个或 2 个 0 元素的方式，提出了几种满足此理论界，周期为 $N=2q$ 的平衡理想几乎四进制序列的构造方法。

定义 2[13] 设 $q=4f+1$ 为奇素数，θ 是有限域 $\mathrm{GF}(q)$ 上的本原元，令

$$H_i=\{\theta^{i+4t},t=0,1,\cdots,f-1\},i=0,1,2,3 \tag{2}$$

则称 H_i 为 $\mathrm{GF}(q)$ 上的四阶分圆类。令

$$(i,j)=\left|(H_i+1)\cap H_j\right|,i,j=0,1,2,3 \tag{3}$$

其中，H_i+1 代表集合 $\{h_i+1,h_i\in H_i\}$，“+”代表和模 q，则 (i,j) 称作基于 $\mathrm{GF}(q)$ 的四阶分圆数。

引理 2[13] 设 $q=4f+1$ 为奇素数，其中 f 为正整数。q 又可表示为 $q=4m^2+n^2$，其中 m、n 均为正整数。根据 f 的奇偶性和 $n\equiv 1(\bmod 4)$ 或 $n\equiv 3(\bmod 4)$ 不同取值将四阶分圆数进行如下分类。

当 f 为奇数时，Z_q 上的四阶分圆数的关系如式(4)所示，Z_q 上的四阶分圆类的 5 个基本分圆数如表 1 所示。

$$\begin{aligned}&(0,0)=(2,0)=(2,2)\\&(0,1)=(1,3)=(3,2)\\&(0,2)\\&(0,3)=(1,2)=(3,1)\\&(1,0)=(1,1)=(2,1)=(2,3)=(3,0)=(3,3)\end{aligned} \tag{4}$$

表 1　当 f 为奇数时，Z_q 的四阶分圆数的 5 个基本分圆数

(i,j)	$n\equiv 1(\bmod 4)$	$n\equiv 3(\bmod 4)$
$16(0,0)$	$q-7+2n$	$q-7-2n$
$16(0,1)$	$q+1+2n-8m$	$q+1-2n-8m$
$16(0,2)$	$q+1-6n$	$q+1+6n$
$16(0,3)$	$q+1+2n+8m$	$q+1-2n+8m$
$16(1,0)$	$q-3-2n$	$q-3+2n$

当 f 为偶数时，Z_q 上的四阶分圆数的关系如式(5)所示，Z_q 上的四阶分圆类的 5 个基本分圆数如表 2 所示。

$$\begin{aligned}&(0,0)\\&(0,1)=(1,0)=(3,3)\\&(0,2)=(2,0)=(2,2)\\&(0,3)=(1,1)=(3,0)\\&(1,2)=(1,3)=(2,1)=(2,3)=(3,1)=(3,2)\end{aligned}\tag{5}$$

表 2　当 f 为偶数时，Z_q 上的四阶分圆数的 5 个基本分圆数

(i,j)	$n\equiv 1(\bmod 4)$	$n\equiv 3(\bmod 4)$
$16(0,0)$	$q-11-6n$	$q-11+6n$
$16(0,1)$	$q-3+2n+8m$	$q-3-2n+8m$
$16(0,2)$	$q-3+2n$	$q-3-2n$
$16(0,3)$	$q-3+2n-8m$	$q-3-2n-8m$
$16(1,2)$	$q+1-2n$	$q+1+2n$

引理 3[14]　根据中国剩余定理，$Z_{2q}\cong Z_2\times Z_q$ 存在如式(6)所示映射关系。

$$f(\delta)=(\delta_0,\delta_1)\tag{6}$$

其中，$\delta\in Z_{2q}$，$\delta_0=\delta \bmod 2$，$\delta_1=\delta \bmod q$。

设 $F_{k,h}=f^{-1}(\{k\}\times H_h)$，$k=0,1$，$h\in\{0,1,2,3\}$，特别地，$0=f^{-1}(0,0)$，$q=f^{-1}(1,0)$。

设 $C_k=F_{a_k,j_k}\cup F_{b_k,l_k}$，$k\in\{0,1,2,3\}$，其中 $a_k,b_k\in\{0,1\}$，$j_k,l_k\in\{0,1,2,3\}$，当 $k\neq m$ 时，$j_k\neq j_m$，$l_k\neq l_m$，且 a_k、b_k 的取值互不影响。那么，$C_0\cup C_1\cup C_2\cup C_3\cup\{0,q\}=Z_{2q}$，$|C_0|=|C_1|=|C_2|=|C_3|=\dfrac{q-1}{2}$。

定义 3　周期为 $2q$ 的几乎四进制序列 $y(t)$ 定义如式(7)所示。

$$y(t)=\begin{cases}y(0),t \bmod 2q\in\{0\}\\ y(q),t \bmod 2q\in\{q\}\\ 1,t \bmod 2q\in C_0\\ i,t \bmod 2q\in C_1\\ -1,t \bmod 2q\in C_2\\ -i,t \bmod 2q\in C_3\end{cases}\tag{7}$$

其中，$y(0),y(q)\in\{0,1,-1,i,-i\}$，并且 $y(0),y(q)$ 中至少有一个为 0。

定义 4　设周期为 N 的几乎四进制序列 y 的元素集为 $Y=\{0,1,-1,i,-i\}$，$Y^*=Y/\{0\}$，令 $N_k(y)=|\{0\leqslant t<N:y(t)=k\}|,k\in Y^*$，当满足式(8)所示条件时，几乎四进制序列 y 称为平衡序列。

$$\max_{k\in Y}N_k(y)-\min_{k\in Y}N_k(y)\leqslant 1\tag{8}$$

定义 5[10]　设 A 和 B 是整数环 Z_{2q} 上的 2 个子集，差函数 $d_\delta(A,B)$ 定义为

$$d_\delta(A,B)=|A\cap(B+\delta)|\tag{9}$$

其中，$B+\delta$ 代表集合 $\{b+\delta:b\in B\}$，“+”代表和模 $2q$。

引理 4[9]　设 $A=f^{-1}(\{0\}\times A_0\cup\{1\}\times A_1)$，$B=f^{-1}(\{0\}\times B_0\cup\{1\}\times B_1)$，$\delta=f^{-1}(\delta_0,\delta_1)$，$(\delta_0,\delta_1)\in Z_2\times Z_q$，则有

$$d_\delta(A,B)=\begin{cases}|A_0\cap B_0|+|A_1\cap B_1|,\ \delta_0=0,\delta_1=0\\ |A_0\cap(B_0+\delta_1)|+|A_1\cap(B_1+\delta_1)|,\ \delta_0=0,\delta_1\neq 0\\ |A_0\cap(B_1+\delta_1)|+|A_1\cap(B_0+\delta_1)|,\ \delta_0=1,\delta_1\neq 0\\ |A_0\cap B_1|+|A_1\cap B_0|,\ \delta_0=1,\delta_1=0\end{cases}\tag{10}$$

引理 5[9]　设 $A=f^{-1}(\{0\}\times A_0\cup\{1\}\times A_1)$，其中，$A_0$ 和 A_1 是 Z_q 的子集，并且 $\delta=f^{-1}(\delta_0,\delta_1)$，$(\delta_0,\delta_1)\in Z_2\times Z_q$，则有

1) $|\{0\}\cap(A+\delta)|=\begin{cases}|\{0\}\cap(A_0+\delta_1)|,\ \delta_0=0\\ |\{0\}\cap(A_1+\delta_1)|,\ \delta_0=1\end{cases}$。

2) $|A\cap(\{0\}+\delta)|=\begin{cases}|A_0\cap\{\delta_1\}|,\ \delta_0=0\\ |A_1\cap\{\delta_1\}|,\ \delta_0=1\end{cases}$。

3) $|\{q\}\cap(A+\delta)|=\begin{cases}|\{0\}\cap(A_1+\delta_1)|,\ \delta_0=0\\ |\{0\}\cap(A_0+\delta_1)|,\ \delta_0=1\end{cases}$。

4) $\left|A\cap(\{q\}+\delta)\right|=\begin{cases}\left|A_1\cap\{\delta_1\}\right|, \delta_0=0\\ \left|A_0\cap\{\delta_1\}\right|, \ \delta_0=1\end{cases}$。

引理 6[9] 设 $e\in H_h$，$h\in\{0,1,2,3\}$，则有

1) $\left|H_i\cap(H_j+e)\right|=(h-j,i-j)$。

2) $\left|H_i\cap\{e\}\right|=\begin{cases}1, \ h=i\\ 0, \ 其他\end{cases}$。

3) $\left|\{0\}\cap(H_i+e)\right|=\begin{cases}1, \ h=i \text{ 且 } q\equiv 1(\mathrm{mod}\, 8) \text{ 或}\\ h=(i+2\ )(\mathrm{mod} 4)\text{且} q\equiv\\ 5(\mathrm{mod}\, 8)\\ 0, 其他\end{cases}$。

3 理想几乎四进制序列构造

定理 1 设 $q=4f+1=4m^2+n^2$ 为一奇素数，其中 f 为正整数，令 $(y(0),y(q))=(0,0)$，由式(7)定义的序列 $y(t)$ 中各参数满足表 3 所示集合时，构造得到的几乎四进制序列均是理想平衡几乎四进制序列，且其相关函数值如式(11)所示。

$$R_y(\delta)=\begin{cases}2q-2, & \delta=0\\ 0, & q \text{ 次}\\ -2, & q-1 \text{ 次}\end{cases} \tag{11}$$

表 3 满足定理 1 的序列 $y(t)$的参数集合

(a_0,a_1,a_2,a_3)	(j_0,j_1,j_2,j_3)	(b_0,b_1,b_2,b_3)	(l_0,l_1,l_2,l_3)
(0,1,0,1)	(0,0,1,1)	(0,1,0,1)	(2,2,3,3)
	(0,0,1,2)		(3,1,2,3)
	(0,1,1,0)		(2,3,3,2)
	(0,2,1,0)		(3,3,2,1)
	(0,0,2,1)		(1,3,3,2)
	(0,1,2,0)		(1,2,3,3)
(0,0,0,0)	(0,1,2,3)	(1,1,1,1)	(1,2,3,0)
	(0,1,2,3)		(3,0,1,2)

证明 以 $(a_0,a_1,a_2,a_3,)=(0,1,0,1)$，$(j_0,j_1,j_2,j_3,)=(0,0,1,1)$，$(b_0,b_1,b_2,b_3,)=(0,1,0,1)$，$(l_0,l_1,l_2,l_3,)=(2,2,3,3)$ 为例进行证明，根据定义 3 可以得到

$$\begin{aligned}C_0&=F_{0,0}\cup F_{0,2}=\{0\}\times H_0\cup\{0\}\times H_2\\ C_1&=F_{1,0}\cup F_{1,2}=\{1\}\times H_0\cup\{1\}\times H_2\\ C_2&=F_{0,1}\cup F_{0,3}=\{0\}\times H_1\cup\{0\}\times H_3\\ C_3&=F_{1,1}\cup F_{1,3}=\{1\}\times H_1\cup\{1\}\times H_3\end{aligned} \tag{12}$$

因为 $(y(0),y(q))=(0,0)$，所以 $|C_0|=|C_1|=|C_2|=|C_3|=\frac{q-1}{2}$。由定义 4 可知，该构造方法所得的几乎四进制序列 y 是平衡的。

令序列 y 的自相关函数 $R_y(\delta)=R_e(R_y(\delta))+iI_m(R_y(\delta))$，其中 $R_e(R_y(\delta))$ 表示 $R_y(\delta)$ 的实部，$I_m(R_y(\delta))$ 表示 $R_y(\delta)$ 的虚部。由定义 5、引理 4 和引理 5 可以计算得到式(13)和式(14)。

$$\begin{aligned}&R_e(R_y(\delta))=\sum_{i=0}^{3}d_\delta(C_i,C_i)-d_\delta(C_0,C_2)-\\ &d_\delta(C_2,C_0)-d_\delta(C_1,C_3)-d_\delta(C_3,C_1)=\\ &2\left|\{0\}\cap\{\delta_0\}\right|(\sum_{i=0}^{3}\left|H_i\cap(H_i+\delta_1)\right|+\\ &\left|H_0\cap(H_2+\delta_1)\right|+\left|H_2\cap(H_0+\delta_1)\right|+\\ &\left|H_1\cap(H_3+\delta_1)\right|+\left|H_3\cap(H_1+\delta_1)\right|-\\ &\left|H_0\cap(H_1+\delta_1)\right|-\left|H_0\cap(H_3+\delta_1)\right|-\\ &\left|H_2\cap(H_1+\delta_1)\right|-\left|H_2\cap(H_3+\delta_1)\right|-\\ &\left|H_1\cap(H_0+\delta_1)\right|-\left|H_1\cap(H_2+\delta_1)\right|-\\ &\left|H_3\cap(H_0+\delta_1)\right|-\left|H_3\cap(H_2+\delta_1)\right|)\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}&I_m(R_y(\delta))=d_\delta(C_0,C_3)+d_\delta(C_1,C_0)+\\ &d_\delta(C_2,C_1)+d_\delta(C_3,C_2)-d_\delta(C_0,C_1)-\\ &d_\delta(C_1,C_2)-d_\delta(C_2,C_3)-d_\delta(C_3,C_0)=\\ &2\left|\{1\}\cap\{\delta_0\}\right|\left(\sum_{j=0}^{3}\sum_{i=0}^{3}\left|H_j\cap(H_i+\delta_1)\right|-\right.\\ &\left.\sum_{j=0}^{3}\sum_{i=0}^{3}\left|H_j\cap(H_i+\delta_1)\right|\right)=0\end{aligned} \tag{14}$$

因此，$R_y(\delta)=R_e(R_y(\delta))$。

1) 当 $\delta_0=0$，$\delta_1=0$ 时，显然，$R_y(0)=2q-2$。

2) 当 $\delta_0=0$，$\delta_1\neq 0$ 时，令 $\delta_1\in H_h$，$h\in\{0,1,2,3\}$，由引理 2 和引理 6 可知，

$$\begin{aligned}&R_y(\delta)=R_e(R_y(\delta))=\\ &2\sum_{k=0}^{3}\left[(h-k,0)+(h-k,2)-(h-k,1)-(h-k,3)\right]=\\ &2\sum_{i=0}^{3}\left[(i,0)+(i,2)-(i,1)-(i,3)\right]\end{aligned} \tag{15}$$

a) 若 f 为奇数，则

$$R_y(\delta)=2[3(0,0)+(0,2)-(0,1)-(0,3)-2(1,0)] \quad (16)$$

当 $n\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ 时，$R_y(\delta)=-2$ 。

当 $n\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$ 时，$R_y(\delta)=-2$ 。

b) 若 f 为偶数，则

$$R_y(\delta)=2[3(0,2)+(0,0)-(0,1)-(0,3)-2(1,2)] \quad (17)$$

当 $n\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ 时，$R_y(\delta)=-2$ 。

当 $n\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$ 时，$R_y(\delta)=-2$ 。

所以，$R_y(\delta)=-2$ 。

3) 当 $\delta_0=1$ 时，由于 $\left|\{0\}\cap\{1\}\right|=0$ ，因此 $R_y(\delta)=R_e(R_y(\delta))=0$ 。

综上所述，其相关函数值如式(11)所示，由此可知得到的几乎四进制序列为理想平衡几乎四进制序列。其他组合情况证明过程与上述证明过程类似，不再赘述。证毕。

例 1 设 $q=17=4\times4+1=4\times2^2+1$，取 $\theta=2$，可以得到

$H_0=\{1,4,13,16\}$，$H_1=\{3,5,12,14\}$，$H_2=\{2,8,9,15\}$，$H_3=\{6,7,10,11\}$

$F_{0,0}=\{4,16,18,30\}$，$F_{1,0}=\{1,13,21,33\}$，$F_{0,1}=\{12,14,20,22\}$，$F_{1,1}=\{3,5,29,31\}$

$F_{0,2}=\{2,8,26,32\}$，$F_{1,2}=\{9,15,19,25\}$，$F_{0,3}=\{6,10,24,28\}$，$F_{1,3}=\{7,11,23,27\}$

若 $(a_0,a_1,a_2,a_3,)=(0,1,0,1)$，$(j_0,j_1,j_2,j_3,)=(0,0,1,1)$，$(b_0,b_1,b_2,b_3,)=(0,1,0,1)$，$(l_0,l_1,l_2,l_3,)=(2,2,3,3)$，则

$$C_0=F_{0,0}\cup F_{0,2}=\{2,4,8,16,18,26,30,32\}$$
$$C_1=F_{1,0}\cup F_{1,2}=\{1,9,13,1519,21,25,33\}$$
$$C_2=F_{0,1}\cup F_{0,3}=\{6,10,12,14,20,22,24,28\}$$
$$C_3=F_{1,1}\cup F_{1,3}=\{3,5,7,11,23,27,29,31\}$$

根据定理 1 可以得到

$$y=(0,\mathrm{i},1,-\mathrm{i},1,-\mathrm{i},-1,-\mathrm{i},1,\mathrm{i},-1,-\mathrm{i},-1,\mathrm{i},-1,\mathrm{i},1,0,1,\mathrm{i},-1,\mathrm{i},-1,-\mathrm{i},-1,\mathrm{i},1,-\mathrm{i},-1,-\mathrm{i},1,-\mathrm{i},1,\mathrm{i})$$

且其相关函数值为

$$\left[R_y(\delta)\right]_{\delta=0}^{33}=[32,0,-2,0,-2,0,-2,0,-2,0,-2,0,-2,0,-2,0,-2,0,-2,0,-2,0,-2,0,-2,0,-2,0,-2,0,-2,0,-2,0]$$

推论 1 当 $q=4f+1=4m^2+n^2$ 为一奇素数，m 为奇数，$n=1$，且 $(y(0),y(q))=(0,0)$ 时，由式(7)定义的序列 $y(t)$ 满足表 4 所示集合时，构造得到的几乎四进制序列是理想平衡几乎四进制序列，且其相关函数值如式(18)所示。

2019225-5

$$R_y(\delta)=\begin{cases}2q-2, & \delta=0\\ 0, & \delta=q\\ 2, & \dfrac{q-1}{2}\text{次}\\ -2, & \dfrac{3q-3}{2}\text{次}\end{cases} \quad (18)$$

表 4 满足推论 1 的序列 $y(t)$ 的参数集合

(a_0,a_1,a_2,a_3)	(j_0,j_1,j_2,j_3)	(b_0,b_1,b_2,b_3)	(l_0,l_1,l_2,l_3)
(0,0,0,0)	(0,1,2,3)	(1,1,1,1)	(0,3,2,1)
	(0,1,2,3)		(2,1,0,3)
	(0,3,2,1)		(0,1,2,3)
	(0,3,2,1)		(2,3,0,1)

证明 推论 1 的证明与定理 1 的证明类似，在此省略。

例 2 设 $q=5=4\times1+1=4\times1^2+1$，取 $\theta=2$，可以得到

$H_0=\{1\}$，$H_1=\{2\}$，$H_2=\{4\}$，$H_3=\{3\}$，

$F_{0,0}=\{6\}$，$F_{1,0}=\{1\}$，$F_{0,1}=\{2\}$，$F_{1,1}=\{7\}$，

$F_{0,2}=\{4\}$，$F_{1,2}=\{9\}$，$F_{0,3}=\{8\}$，$F_{1,3}=\{3\}$，

当 $(a_0,a_1,a_2,a_3,)=(0,0,0,0)$，$(j_0,j_1,j_2,j_3,)=(0,1,2,3)$，$(b_0,b_1,b_2,b_3,)=(1,1,1,1)$，$(l_0,l_1,l_2,l_3,)=(0,3,2,1)$ 时，根据推论 1，可以得到

$$y=(0,1,\mathrm{i},\mathrm{i},-1,0,1,-\mathrm{i},-\mathrm{i},-1)$$

且其相关函数值为

$$\left[R_y(\delta)\right]_{\delta=0}^{9}=\left[8,2,-2,-2,-2,0,-2,-2,-2,2\right]$$

因此，序列 y 是平衡的理想几乎四进制序列。

推论 1 是对定理 1 方法的补充，即当 $q=4f+1=4m^2+n^2$，其中 m 为奇数，$n=1$ 的情况，这些特殊长度除了满足定理 1 的构造方法外，还满足推论 1 的构造方法。

定理 1 与推论 1 是在四进制序列中引入了 2 个 0 元素，即 $(y(0),y(q))=(0,0)$，接下来的定理 2 中

通过引入一个 0 元素，即 $y(0)$ 和 $y(q)$ 其中有一个为 0，同样，可以得到自相关函数旁瓣值的最大模值为 2 的平衡理想几乎四进制序列。

定理 2 设 $q=4f+1=4m^2+n^2$ 为一奇素数，其中，f、m、n 都是正整数，当 $(y(0),y(q))$ 的取值只有一个为 0 时，由式(7)定义的序列 $y(t)$ 满足 $(a_0,a_1,a_2,a_3)=(0,1,0,1)$，$(b_0,b_1,b_2,b_3)=(0,1,0,1)$ 和表 5 所示集合时，构造得到的几乎四进制序列是平衡理想几乎四进制序列，且其相关函数值如表 5 所示。$R'_y(\delta)$ 和 $R''_y(\delta)$ 分别为

$$R'_y(\delta)=\begin{cases}2q-1, & \delta=0\\ 0, & \delta=q\\ 2, & \dfrac{q-1}{2}\text{次}\\ -2, & \dfrac{3q-3}{2}\text{次}\end{cases}$$

$$R''_y(\delta)=\begin{cases}2q-1, & \delta=0\\ 0, & \delta=q\\ -2, & q-1\text{次}\\ -2\mathrm{i}, & \dfrac{q-1}{2}\text{次}\\ 2\mathrm{i}, & \dfrac{q-1}{2}\text{次}\end{cases}$$

证明 定理 2 的证明与定理 1 的证明类似，取 $(y(0),y(q))=(0,1)$，$(a_0,a_1,a_2,a_3,)=(0,1,0,1)$，$(j_0,j_1,j_2,j_3,)=(0,0,1,1)$，$(b_0,b_1,b_2,b_3,)=(0,1,0,1)$，$(l_0,l_1,l_2,l_3,)=(2,2,3,3)$，根据定义 3 可得

$$y(t)=\begin{cases}0, t \bmod 2q\in\{q\}\\ 1, t \bmod 2q\in C_0\cup\{0\}\\ \mathrm{i}, t \bmod 2q\in C_1\\ -1, t \bmod 2q\in C_2\\ -\mathrm{i}, t \bmod 2q\in C_3\end{cases}\tag{19}$$

所以 $|C_1|=|C_2|=|C_3|=\dfrac{q-1}{2}$，$|C_0\cup\{q\}|=\dfrac{q+1}{2}$。由定义 4 可知，该构造方法所得的几乎四进制序列 y 是平衡的。

由引理 4 和引理 5 可得

$$\begin{aligned}&R_e(R_y(\delta))=d_\delta(C_0\cup\{q\},C_0\cup\{q\})+d_\delta(C_1,C_1)+\\&d_\delta(C_2,C_2)+d_\delta(C_3,C_3)-d_\delta(C_0\cup\{q\},C_2)-\\&d_\delta(C_2,C_0\cup\{q\})-d_\delta(C_1,C_3)-d_\delta(C_3,C_1)=\\&M+\Delta R_e(R_y(\delta))\end{aligned}\tag{20}$$

其中，有

$$\begin{aligned}&M=2\left|\{0\}\cap\{\delta_0\}\right|\Big(\sum_{i=0}^{3}\left|H_i\cap(H_i+\delta_1)\right|+\left|H_0\cap(H_2+\delta_1)\right|+\\&\left|H_2\cap(H_0+\delta_1)\right|+\left|H_1\cap(H_3+\delta_1)\right|+\left|H_3\cap(H_1+\delta_1)\right|-\\&\left|H_0\cap(H_1+\delta_1)\right|-\left|H_0\cap(H_3+\delta_1)\right|-\left|H_2\cap(H_1+\delta_1)\right|-\\&\left|H_2\cap(H_3+\delta_1)\right|-\left|H_1\cap(H_0+\delta_1)\right|-\left|H_1\cap(H_2+\delta_1)\right|-\\&\left|H_3\cap(H_0+\delta_1)\right|-\left|H_3\cap(H_2+\delta_1)\right|\Big)\end{aligned}\tag{21}$$

$$\begin{aligned}&\Delta R_e(R_y(\delta))=\left|\{1\}\cap\{\delta_0\}\right|\Big(\left|H_0\cap\{\delta_1\}\right|+\left|H_2\cap\{\delta_1\}\right|+\\&\left|\{0\}\cap(H_0+\delta_1)\right|+\left|\{0\}\cap(H_2+\delta_1)\right|-\\&\left|\{0\}\cap(H_1+\delta_1)\right|-\left|\{0\}\cap(H_3+\delta_1)\right|-\\&\left|H_1\cap\{\delta_1\}\right|-\left|H_3\cap\{\delta_1\}\right|\Big)\end{aligned}\tag{22}$$

$$\begin{aligned}&I_m(R_y(\delta))=d_\delta(C_0\cup\{q\},C_3)+d_\delta(C_1,C_0\cup\{q\})+\\&d_\delta(C_2,C_1)+d_\delta(C_3,C_2)-d_\delta(C_0\cup\{q\},C_1)-\\&d_\delta(C_1,C_2)-d_\delta(C_2,C_3)-d_\delta(C_3,C_0\cup\{q\})=\\&N+\Delta I_m(R_y(\delta))\end{aligned}\tag{23}$$

其中，有

表 5 满足定理 2 的序列 $y(t)$ 的参数集合

f	(j_0,j_1,j_2,j_3)	(l_0,l_1,l_2,l_3)	$(y(0),y(q))$	$R_y(\delta)$
f 为正整数	(0,0,1,1)	(2,2,3,3)	$(0,\pm1)$，$(\pm\mathrm{i},0)$	$R'_y(\delta)$
	(0,1,1,0)	(2,3,3,2)		
f 为偶数	(0,0,1,2)	(3,1,2,3)	$(0,\pm1)$，$(\pm\mathrm{i},0)$	$R'_y(\delta)$
	(0,2,1,0)	(3,3,2,1)		
f 为奇数	(0,0,2,1)	(1,3,3,2)	$(\pm1,0)$，$(0,\pm\mathrm{i})$	$R''_y(\delta)$
	(0,1,2,0)	(1,2,3,3)		

$$N=2\left|\{1\}\cap\{\delta_0\}\right|$$

$$\left(\sum_{j=0}^{3}\sum_{i=0}^{3}\left|H_j\cap(H_i+\delta_1)\right|-\sum_{j=0}^{3}\sum_{i=0}^{3}\left|H_j\cap(H_i+\delta_1)\right|\right)=0 \tag{24}$$

$$\Delta I_m(R_y(\delta))=\left|\{1\}\cap\{1\}+\{\delta_0\}\right|(\left|H_0\cap\{\delta_1\}\right|+\left|H_2\cap\{\delta_1\}\right|+\left|\{0\}\cap(H_1+\delta_1)\right|+\left|\{0\}\cap(H_3+\delta_1)\right|-\left|\{0\}\cap(H_0+\delta_1)\right|-\left|\{0\}\cap(H_2+\delta_1)\right|-\left|H_1\cap\{\delta_1\}\right|-\left|H_3\cap\{\delta_1\}\right|) \tag{25}$$

因此，$R_y(\delta)=\begin{cases}M+\Delta I_m\left(R_y(\delta)\right),\delta_0=0\\ \Delta R_e\left(R_y(\delta)\right), \quad \delta_0=1\end{cases}$。

1) 当 $\delta_0=0$，$\delta_1=0$ 时，显然，$R_y(0)=2q-1$。

2) 当 $\delta_0=0$，$\delta_1\neq0$，$\delta_1\in H_h, h=0,1,2,3$ 时，由引理 2 和引理 6 可得

$$M=2\sum_{k=0}^{3}\left[(h-k,0)+(h-k,2)-(h-k,1)-(h-k,3)\right]=-2 \tag{26}$$

若 $\delta_1\in H_0$，则 $-\delta_1\in H_2$，有

$$\Delta I_m(R_y(\delta))=\left|H_0\cap\{\delta_1\}\right|-\left|\{0\}\cap(H_2+\delta_1)\right|=\left|H_0\cap\{\delta_1\}\right|-\left|\{-\delta_1\}\cap H_2\right|=0 \tag{27}$$

同理，当 $\delta_1\in\{H_1,H_2,H_3\}$ 时，$\Delta I_m(R_y(\delta))=0$，所以，$\Delta I_m(R_y(\delta))=0$。

所以，$R_y(\delta)=-2$。

3) 当 $\delta_0=1$，$\delta_1=0$ 时，$\Delta R_e(R_y(\delta))=0$，所以 $R_y(\delta)=0$。

4) 当 $\delta_0=1$，$\delta_1\neq0$，$\delta_1\in H_h, h=0,1,2,3$ 时，若 $\delta_1\in H_0$，则 $-\delta_1\in H_2$，则有

$$\Delta R_e(R_y(\delta))=\left|\{1\}\cap\{\delta_0\}\right|(\left|H_0\cap\{\delta_1\}\right|+\left|\{-\delta_1\}\cap H_2\right|=2 \tag{28}$$

同理，若 $\delta_1\in H_2$，$\Delta R_e(R_y(\delta))=2$，若 $\delta_1\in H_1,H_3$，$\Delta R_e(R_y(\delta))=-2$。所以

$$R_y(\delta)=\Delta R_e(R_y(\delta))=\begin{cases}2, h=0,2\\-2, h=1,3\end{cases} \tag{29}$$

综上所述，$R_y(\delta)=R_y'(\delta)$，其他组合的证明与上述证明过程相似，不再赘述。证毕。

例 3 $q=17=4\times4+1=4\times2^2+1$，取 $\theta=2$，其分圆类和分圆数与例 1 相同，此时，若 $(y(0),y(q))=(0,1)$，$(a_0,a_1,a_2,a_3,)=(0,1,0,1)$，$(j_0,j_1,j_2,j_3,)=(0,0,1,1)$，$(b_0,b_1,b_2,b_3,)=(0,1,0,1)$，$(l_0,l_1,l_2,l_3,)=(2,2,3,3)$，根据定理 2 可以得到

$$y=(0,\mathrm{i},1,-\mathrm{i},1,-\mathrm{i},-1,-\mathrm{i},1,\mathrm{i},-1,-\mathrm{i},-1,\mathrm{i},-1,\mathrm{i},1,1,1,\mathrm{i},-1,\mathrm{i},-1,-\mathrm{i},-1,\mathrm{i},1,-\mathrm{i},-1,-\mathrm{i},1,-\mathrm{i},1,\mathrm{i})$$

且其自相关函数值为

$$\left[R_y(\delta)\right]_{\delta=0}^{33}=[33,2,-2,-2,-2,-2,-2,-2,-2,2,-2,-2,-2,2,-2,2,-2,0,-2,2,-2,2,-2,-2,-2,2,-2,-2,-2,-2,-2,-2,-2,2]$$

例 4 设 $q=5=4\times1+1=4\times1^2+1^2$，取 $\theta=2$，其分圆类和分圆数与例 2 相同，此时，若 $(y(0),y(q))=(0,\mathrm{i})$，$(a_0,a_1,a_2,a_3,)=(0,1,0,1)$，$(j_0,j_1,j_2,j_3,)=(0,0,2,1)$，$(b_0,b_1,b_2,b_3,)=(0,1,0,1)$，$(l_0,l_1,l_2,l_3,)=(1,3,3,2)$，根据定理 2 可以得到

$$y=(0,\mathrm{i},1,\mathrm{i},-1,\mathrm{i},1,-\mathrm{i},-1,-\mathrm{i})$$

且其自相关函数值为

$$\left[R_y(\delta)\right]_{\delta=0}^{9}=\left[9,2\mathrm{i},-2,-2\mathrm{i},-2,0,-2,-2\mathrm{i},-2,-2\mathrm{i}\right]$$

4 结束语

通过在四进制序列中引入一个或 2 个 0 元素的思想，基于四阶分圆类和中国剩余定理，本文得到了许多新的周期长度为 $2q$ (q 为奇素数)的平衡理想几乎四进制序列。表 6 列出了目前已有的偶数长理想四进制序列同本文得到的理想几乎四进制序列在构造方法和性能特性方面的对比结果。由表 6 可知，本文得到的所有几乎四进制序列的 $R_{\max}=2$，满足文献[5]中给出的理论界要求，且都具有很好的平衡性。与文献[5-8]相比，文献[5-8]得到的理想四进制序列都是由特殊的二进制序列进行逆 gray 映射得到的，且文献[9]得到的四进制序列是几乎平衡的。而本文提出的构造方法是一种直接构造，性能特性不受所采用的二进制序列特性限制，都是平衡的；与文献[9-10]相比，虽采用的都是分圆类方法，但是文献[9]得到的四进制序列的 $R_{\max}\in\left\{4,\sqrt{8}\right\}$，不满足理想四进制序

表 6　现有的偶数长(几乎)四进制序列的比较

周期 N	(几乎)四进制	旁瓣值	$R_{\max}$	平衡性	定理
$N=2(2^n-1)$	四进制	$\{0,-2\}$	2	平衡	逆 gray 映射[7]
$N=2q$	四进制	$\{0,-2\}$	2	平衡	逆 gray 映射[8]
$N=p^n-1$	四进制	$\{2\mathrm{i},-2\mathrm{i},-2\}$	2	几乎平衡	逆 gray 映射[6]
$N=2q$, $q\equiv 3(\bmod 4)$	四进制	$\{0,-2\}$	2	平衡	逆 gray 映射[5]
$N=2q$, $q\equiv 1(\bmod 8)$	四进制	$\{0,-2,2,-4\}$	4	平衡	四阶分圆[9]
$N=2q$, $q\equiv 5(\bmod 8)$	四进制	$\{-2,\pm 2\mathrm{i},-2\pm 2\mathrm{i}\}$	$\sqrt{8}$	平衡	四阶分圆[9]
$N=2q$, $q=4m^2+1$, m 为偶数	四进制	$\{2,-2\}$	2	平衡	四阶分圆[10]
$N=2q$, $q=4+n^2$, n 为奇数	四进制	$\{2,-2\}$	2	平衡	四阶分圆[10]
$N\equiv 0(\bmod 4)$	几乎四进制	$\{0,-4\}$	4	平衡	交织法[12]
$N=2q$, $q=4f+1$	几乎四进制	$\{0,-2\}$	2	平衡	定理 1,本文
$N=2q$, $q=4m^2+1$, m 为奇数	几乎四进制	$\{0,2,-2\}$	2	平衡	推论 1,本文
$N=2q$, $q=4f+1$	几乎四进制	$\{0,2,-2\}$	2	平衡	定理 2,本文
$N=2q$, $q=4f+1$, f 为偶数	几乎四进制	$\{0,2,-2\}$	2	平衡	定理 2,本文
$N=2q$, $q=4f+1$, f 为奇数	几乎四进制	$\{0,-2,2\mathrm{i},-2\mathrm{i}\}$	2	平衡	定理 2,本文

注：q 为奇素数，f 为正整数

列的理论界，文献[10]的序列虽然满足理想四进制序列的理论界，但是存在空间相当有限，在 $q\leqslant 100$ 内仅存在 $q=5,13,17,29,53$ 这 5 种情况，而通过本文方法可将 q 的范围扩展到 $q=5,13,17,29,37,41,53,61,73,89,97$ 。所以通过本文构造方法，可以得到更多平衡的理想四进制序列，为实际工程应用和通信系统提供了更多的可供选择的信号范围。

参考文献：

[1] 沈秀敏. 基于分圆类的理想序列偶设计[D]. 秦皇岛：燕山大学, 2017: 74-96.
SHEN X M. The design of optimal sequence pairs based on cyclotomy[D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2017: 74-96.

[2] SCHOTTEN H D. New optimum ternary complementary sets and almost quadriphase perfect sequences[C]//International Conference on Neural Networks and Signal Processing. 1995: 1106-1109.

[3] SCHOTTEN H D. Optimum complementary sets and quadriphase sequences derived from q-ary m-sequences[C]//IEEE International Symposium on Information Theory. IEEE, 1997: 485.

[4] LÜKE H D, SCHOTTEN H D, HADINEJAD-MAHRAM H. Binary and quadriphase sequences with optimal autocorrelation properties: a survey [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2003, 49(12): 3271-3282.

[5] TANG X H, DING C S. New classes of balanced quaternary and almost balanced binary sequences with optimal autocorrelation value[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(12): 6398-6405.

[6] KIM Y S, JANG J W, KIM S H, et al. New quaternary sequences with optimal autocorrelation[C]//IEEE International Symposium on Information Theory. IEEE, 2009: 286-289.

[7] JANG J W, KIM Y S, KIM S H, et al. New quaternary sequences with ideal autocorrelation constructed from binary sequences with ideal autocorrelation[C]//IEEE International Symposium on Information The-

ory. IEEE, 2009: 278-281.

[8] KIM Y S, JANG J W, KIM S H, et al. New construction of quaternary sequences with ideal autocorrelation from Legendre sequences[C]// IEEE International Symposium on Information Theory. IEEE, 2009: 282-285.

[9] EDEMSKIY V, IVANOV A. Autocorrelation and linear complexity of quaternary sequences of period 2*p* based on cyclotomic classes of order four[C]//IEEE International Symposium on Information Theory. IEEE, 2013: 3120-3124.

[10] SHEN X M, JIA Y G, WANG J Q, et al. New families of balanced quaternary sequences of even period with three-level optimal autocorrelation[J]. IEEE Communications Letters, 2017, 21(10): 2146-2149.

[11] TANG X H, LINDNER J. Almost quadriphase sequence with ideal autocorrelation property[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2009, 16(1): 38-40.

[12] 彭秀平. 二值和三值自相关序列偶设计理论研究[D]. 秦皇岛: 燕山大学, 2014: 82-86.

PENG X P. Research on the design theory of sequence pair with two-level and three-level correlation[D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2014: 82-86.

[13] STORER T. Cyclotomy and difference sets[M]. Chicago: Markham, 1967: 75-77.

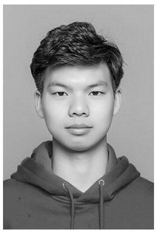
[14] 阮传概, 孙伟. 近世代数及其应用[M]. 北京: 北京邮电大学出版社, 2001: 163-296.

RUAN C G, SUN W. Modern algebra and application [M]. Beijing: Beijing University of Posts and Telecommunications Press, 2001: 163-296.

[作者简介]

彭秀平（1984– ），女，安徽安庆人，博士，燕山大学副教授，主要研究方向为编码理论、信号设计等。

冀惠璞（1995– ），女，河北邢台人，燕山大学硕士生，主要研究方向为编码理论、信号设计等。



郑德亮（1994– ），男，四川巴中人，燕山大学硕士生，主要研究方向为编码理论、信号设计等。

牛晓霞（1981– ），女，河北保定人，燕山大学高级实验师，主要研究方向为图像信息处理、三维建模等。